Recasages possibles : 204, 214, 215.
Référence : Analyse, Gourdon (p. 42, 328, 349-250)

Développement On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne usuelle.

Lemme 1 Tout ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ est connexe par lignes brisées.

Lemme 2 Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert connexe et $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Si $d_x f = 0$ pour tout $x \in U$, alors f est constante sur U.

Théorème 3 Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $d_x f$ est une isométrie. Alors, f est une isométrie affine.

- *Preuve du Lemme 1* : Rappelons ce que signifie *connexe par lignes brisées*. On appelle *ligne brisée* joignant deux points $a, b \in \mathbb{R}^n$ toute partie de la forme $\bigcup\limits_{i=1}^{r} [x_{i-1}, x_i]$ où $r \in \mathbb{N}^*$, $x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b \in \mathbb{R}^n$, et où $[x_{i-1}, x_i]$ désigne l'ensemble $\{(1-\lambda)x_{i-1} + \lambda x_i\}_{\lambda \in [0,1]}$. Une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ est alors dite *connexe par lignes brisées* si pour tous $a, b \in A$, il existe une ligne brisée incluse dans A joignant a et b. Montrons que c'est le cas des ouverts connexes de $\mathbb{R}^n$.

  Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ connexe non vide. Soit $x_0 \in U$ et notons T_{x_0} l'ensemble des points $x \in U$ tels qu'il existe une ligne brisée joignant x à x_0 dans U. On veut évidemment montrer que $T_{x_0} = U$, et pour cela, montrons que T_{x_0} est à la fois ouvert et fermé dans U.
  - Si $x \in T_{x_0}$, comme $x \in U$ qui est ouvert dans $\mathbb{R}^n$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$. Ainsi, pour tout $y \in B(x, r)$, comme les boules sont convexes, on a $[x, y] \subset U$. Ainsi, en concaténant la ligne brisée joignant x à x_0 et le segment $[x, y]$, on crée une ligne brisée dans U joignant y à x_0, soit $y \in T_{x_0}$. Ainsi, T_{x_0} est ouvert dans U.
  - Soit $x \in \overline{T_{x_0}}^U = \overline{T_{x_0}} \cap U$ (cet ensemble est l'adhérence de T_{x_0} pour la topologie induite dans U). Comme U est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$. Mais comme $x \in \overline{T_{x_0}}$, on a $B(x, r) \cap T_{x_0} \neq \emptyset$. Soit donc $y \in B(x, r) \cap T_{x_0}$. Alors $[y, x] \subset U$ et il existe une ligne brisée joignant y à x_0, donc par concaténation, $x \in T_{x_0}$. On a donc $\overline{T_{x_0}}^U \subset T_{x_0}$ et l'inclusion réciproque est triviale, d'où $T_{x_0} = \overline{T_{x_0}}^U$, ce qui montre que T_{x_0} est fermé dans U.

  La partie T_{x_0} est ouverte et fermée dans le connexe U, donc comme $T_{x_0} \neq \emptyset$ (puisque $x_0 \in T_{x_0}$), on a $T_{x_0} = U$. Ainsi, pour tous $x, y \in U$, il existe une ligne brisée dans U entre x et x_0 et une entre y et x_0, donc par concaténation, il existe une ligne brisée entre x et y. Ceci montre bien que U est connexe par lignes brisées, ce qui termine la preuve du **Lemme 1**.

- *Preuve du Lemme 2* : Soient $a, b \in U$. D'après le **Lemme 1**, on peut joindre a et b par une ligne brisée $\bigcup\limits_{i=1}^{r} [x_{i-1}, x_i]$ incluse dans U. Soit $i \in [\![1, r]\!]$. Comme f est $\mathcal{C}^1$ sur U, en particulier, f est continue sur $[x_{i-1}, x_i]$ et différentiable sur $]x_{i-1}, x_i[$ de différentielle nulle, donc on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis sur le segment $[x_{i-1}, x_i]$ à f :

$$\|f(x_i) - f(x_{i-1})\| \leqslant 0 \, \|x_i - x_{i-1}\| = 0,$$

  donc $f(x_{i-1}) = f(x_i)$. Ceci étant valable pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on a par transitivité $f(a) = f(b)$, d'où le fait que f est constante sur U. Ceci conclut la preuve du **Lemme 2**.

- *Preuve du Théorème 3* : Notons que comme $\forall x, h \in \mathbb{R}^n$, $\|d_x f(h)\| = \|h\|$, on a $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|d_x f\|_{\mathrm{op}} = 1$, donc d'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \ \|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\| .$$

  Soit $a \in \mathbb{R}^n$. Comme $d_a f$ est une isométrie, en particulier elle est inversible. Ainsi, d'après le théorème d'inversion locale, il existe un ouvert V_a de $\mathbb{R}^n$ contenant a tel que $f_{|V_a}$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V_a sur $f(V_a)$. Notons g le difféomorphisme réciproque de $f_{|V_a}$. Pour tout $y \in f(V_a)$, on a $d_y g = \left(d_{g(y)} f\right)^{-1}$ donc $d_y g$ est la réciproque d'une isométrie, et donc c'est une isométrie. En considérant un ouvert $U_a \subset V_a$ plus petit, on peut se ramener au cas où $f(U_a)$ est convexe. En effet, en notant B une boule centrée en $f(a)$ et contenue dans $f(V_a)$, et en posant $U_a = g(B) \subset V_a$ on a $W_a := f(U_a) = f(g(B)) = B$ qui est bien convexe. On peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis à g sur W_a, ce qui entraine pour les mêmes raisons que précédemment

$$\forall \xi, \gamma \in W_a, \ \|g(\xi) - g(\gamma)\| \leqslant \|\xi - \gamma\| .$$

  On a donc

$$\forall x, y \in U_a, \ \|x - y\| = \big\|g\big(f(x)\big) - g\big(f(y)\big)\big\| \leqslant \|f(x) - f(y)\| .$$

Avec l'inégalité vue plus haut, on en déduit que

$$\forall x, y \in U_a,\ \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|\,.$$

Ceci se réécrie

$$\forall x, y \in U_a,\ \langle f(x) - f(y), f(x) - f(y) \rangle = \langle x - y, x - y \rangle\,.$$

En différentiant cette identité par rapport à x, on obtient $\forall x, y \in U_a, \forall h \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle d_x f(h), f(x) - f(y) \rangle + \langle f(x) - f(y), d_x f(h) \rangle = \langle h, x - y \rangle + \langle x - y, h \rangle$$

$$\iff \langle d_x f(h), f(x) - f(y) \rangle = \langle h, x - y \rangle\,.$$

En différentiant à nouveau par rapport à y, on obtient $\forall x, y \in U_a, \forall h, k \in \mathbb{R}^n$,

$$-\langle d_x f(h), d_y f(k) \rangle = -\langle h, k \rangle \iff \langle d_x f(h), d_y f(k) \rangle = \langle h, k \rangle\,.$$

Fixons donc $x, y \in U_a$, et $h \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\begin{aligned} \|d_x f(h) - d_y f(h)\|^2 &= \|d_x f(h)\|^2 - 2\langle d_x f(h), d_y f(h) \rangle + \|d_y f(h)\|^2 \\ &= \|h\|^2 - 2\langle h, h \rangle + \|h\|^2 = 0 \end{aligned}$$

d'où $d_x f(h) = d_y f(h)$. Ceci étant valable pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, on a $d_x f = d_y f$.

Posons alors $\Gamma = \{x \in E \mid d_x f = d_0 f\}$. Le raisonnement montre que Γ est ouvert dans $\mathbb{R}^n$. En effet, si $a \in \Gamma$, il existe un ouvert U_a contenant a tel que pour tous $x, y \in U_a$, $d_x f = d_y f$. On a donc pour tout $x \in U_a$, $d_x f = d_a f = d_0 f$, soit $U_a \subset \Gamma$. Or, f est de classe $\mathcal{C}^1$ donc $df : x \mapsto d_x f$ est continue et ainsi, $\Gamma = (df)^{-1}\big(\{d_0 f\}\big)$ est fermé comme image réciproque continue d'un fermé. Comme $\Gamma \neq \emptyset$ (puisque $0 \in \Gamma$), et comme $\mathbb{R}^n$ est connexe, on a $\Gamma = \mathbb{R}^n$. Ainsi, en posant $u = d_0 f$, df est constante égale à u. Ainsi, la fonction $f - u$ est de différentielle nulle sur $\mathbb{R}^n$, donc est constante d'après le **Lemme 2**, égale à un certain $\alpha \in \mathbb{R}^n$. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = u(x) + \alpha,$$

ce qui montre bien que f est une isométrie affine puisque $u = d_0 f$ est une isométrie. Ceci achève la preuve du **Théorème 3**.